

## ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ КАК РАЗДЕЛ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Дятлов Владимир Николаевич, к.ф.-м.н., доцент  
Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ,  
Новосибирский государственный университет  
vndyatlov@gmail.com

Дмитриева Юлия Александровна, старший преподаватель,  
Новосибирский государственный университет  
yudmitrieva@gmail.com

*Аннотация.* Охарактеризован комплекс материалов, посвященных задачам с параметрами.

*Ключевые слова:* задачи с параметром.

### PROBLEMS WITH PARAMETER AS A SECTION OF A SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Vladimir Niklaevich Dyatlov, Associate Professor  
Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
Novosibirsk State University  
vndyatlov@gmail.com  
Yulia Aleksandrovna Dmitrieva, Associate Professor,  
Novosibirsk State University  
yudmitrieva@gmail.com

*Abstract.* A set of materials dedicated to problems with parameters is characterized.

*Keywords:* problems with parameter.

Решение задач, включающих параметр, традиционно представляет определенные трудности для учащихся школы. Более того, в рамках школьного курса нет выделенного раздела, посвященного задачам с параметрами. Изучение задач с параметрами обычно ограничивается рассмотрением

небольшого набора примеров, подобранных под возможности какого-то метода анализа таких задач. В пособиях, посвященных задачам с параметрами, всегда первичны методы решения, и для каждого метода даются подборки задач, решаемых этим методом. Вместе с тем, данная на экзамене задача с параметром никогда не сопровождается указанием того, какой метод можно применить для ее решения, а учащийся обычно не обладает средствами выбора метода ее решения. В итоге результаты экзаменов касательно решения задач с параметрами оказываются весьма скромными.

Одной из основных причин такого явления служит отсутствие в учебных материалах четких первичных понятий, относящихся к задачам с параметрами, классификации постановок задач, отработки методов решения задач каждой из постановок, механизмов выбора методов анализа задачи. Возникает двойственная ситуация: с одной стороны, задачи с параметрами, в принципе не требующие от учащихся дополнительных по сравнению со школьной программой знаний, предлагаются при итоговой аттестации и служат одним из признаков способности учащегося продолжать обучение в вузе, а с другой, их решение связано со специфическими подходами, которые в школьной программе не предусмотрены. Для разрешения возникшего противоречия был предложен системный подход к изучению задач с параметрами, изложенный в серии статей и учебных пособий [1-9], где даны основные необходимые понятия, составлены алгоритмы действий в часто встречающихся типичных ситуациях, разработаны механизмы распознавания применимости методов к решению данной задачи.

Для включения какой-либо темы в программу школьного курса математики в качестве элективного курса или в виде раздела программы желательны:

- (1) наличие определений основных понятий, используемых в данном разделе;
- (2) классификация задач, рассматриваемых в рамках введенных понятий;
- (3) изложение методов, применяемых при анализе задач каждого класса, а главное, присутствие признаков применимости методов для решения поставленной задачи;
- (4) соотнесение данной темы с другими темами курса математики;
- (5) высокая степень методической проработанности материала для подготовки учителей к его изложению;

(6) анализ степени доступности материала для его усвоения определенным контингентом учащихся (спецклассы с углубленным изучением математики, общеобразовательные классы).

Кратко опишем, как высказанные пожелания отражены в пособиях [1,8,9] и серии статей [2-7].

(1) На основе понятия уравнения, неравенства, системы (в разработке используется обобщающий эти понятия термин «соотношение») как способе описания множества и изложенных в [10] методов обеспечения равносильных переходов формируются понятия параметра, решения соотношения с параметром, даются алгоритмы анализа часто встречающихся ситуаций. Решение соотношения с параметром понимается как наиболее простой способ описания семейства множеств. Исходя из этого дается ответ на вопрос, что значит решить соотношение с параметром.

(2) Поскольку решение соотношения с параметром - это описание семейства множеств, а именно при каждом значении параметра указание соответствующего данному значению параметра множества решений, естественны постановки задач, связанные с описанием множеств решений, характеристикой таких множеств с разных точек зрения, их взаимодействием, а также взаимодействием множеств решений двух или более соотношений. В качестве таких постановок могут быть следующие.

(2.1) Решить соотношение, т. е. при каждом значении параметра указать множество решений.

(2.2) Исследовать количественные характеристики множеств решений, т. е. изучить, при каких значениях параметра соотношение имеет определенное количество решений (их нет, есть одно, два и т. д.).

(2.3) Исследовать вопросы качественного характера, например, когда множество решений будет промежутком или промежутком определенной длины и т. п.

(2.4) Исследовать вопросы, связанные с пересечением или объединением множеств решений, соответствующих разным значениям параметра (вопросы типа «выполняется при всех (при некоторых) значениях из указанного множества параметров»).

(2.5) Рассматривая два соотношения, можно интересоваться взаимодействием множеств решений, например, выяснять, при каких значениях параметра одно из множеств содержится в другом или их пересечение непусто и т. д.

Возможны и другие постановки для соотношений.

Если задано семейство функций, зависящих от параметра, обычно ставятся задачи исследования каких-то свойств функций данного семейства в зависимости от параметра, например, наличие экстремумов, участков монотонности, свойств области определения или множества значений и т. д.

(3) Каждая из постановок допускает достаточно регулярные средства ее анализа. Среди всевозможных методов анализа задач для соотношений можно выделить следующие:

(3.1) аналитический,

(3.2) графический с использованием плоскости «переменная-параметр»,

(3.3) графический с использованием плоскости переменных или плоскости «переменная-значение»,

(3.4) использование свойств функций, участвующих в задании соотношения.

Важно подчеркнуть, что для каждого из указанных методов (а также более частных, здесь не упомянутых) сформулированы отличительные особенности применимости метода к анализу данной задачи. Как правило, эти особенности легко обнаруживаются, и тогда можно мотивированно выбирать средства для решения задачи.

(4) Задачи с параметрами тесно переплетаются с другими темами школьного курса алгебры и начал анализа: закрепляются навыки решения простейших уравнений и неравенств разных типов (рациональных, иррациональных, показательных, соотношений с модулем), усиливается потребность в распознавании и применении свойств функций, отрабатываются логические схемы рассуждений.

(5) Подготовленный материал изложен таким образом, что позволяет любому учителю освоить заложенные в нем основы и механизмы действий и успешно применять разработку в учебном процессе. Это подтверждается тем, что решение задачи в рамках основных постановок разбивается на элементарные шаги. Указаны наборы вопросов, приводящие к разветвлению решения и мотивированности выбора пути решения.

(6) Перечислим навыки, которыми желательно владеть для успешного решения задач с параметрами.

(а) Способность выполнения тождественных преобразований алгебраических выражений, в том числе с участием степеней и логарифмов.

(б) Умение переходить от выражений с модулями к выражениям без модулей (раскрывать модули).

(в) Решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства простейших видов.

(г) Знать определения основных связанных с функциями понятий (область определения, множество значений, график), а также свойства функций, уметь распознавать возможность их применения и использовать для решения задач.

Отсутствие навыков в какой-то из указанных тем может побудить к более глубокому их изучению, если учащимся поставлена цель научиться решать задачи с параметром. Вместе с тем если ограничиться первичным знакомством с параметром, то достаточно уметь проводить тождественные преобразования и решать несложные соотношения с модулями и радикалами.

**Заключение.** Изложенный в [1-10] подход к изучению задач с параметрами носит системный характер и включает в себя:

(1) определения основных связанных с параметрами понятий: что такое параметр, что значит множество решений уравнения или неравенства с параметром, что значит решить соотношение с параметром;

(2) классификацию постановок задач с параметрами, относящихся к семействам соотношений и к семействам функций;

(3) методы анализа задач в разных постановках, включающие распознавание применимости метода и разбиение всего процесса решения на исполняемые шаги.

Предложенный подход отличается от известных тем, что в нем первична задача, и по постановке задачи подбирается метод ее анализа, тогда как традиционно для данного метода подбираются задачи, им решаемые. Этот эффект удалось получить за счет разработки механизмов распознавания

применимости каждого из методов для решения данной задачи и алгоритмичного разбиения решения на ряд несложных исполняемых шагов.

Подводя итог изложенному, можно сказать, что разработанный в [1-10] материал может составить основу раздела школьной программы по математике или элективного курса по решению задач с параметрами.

### Список литературы

1. Дятлов В. Н. Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд 7. Задачи с параметрами Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. 92 с.

2. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 7. Задачи с параметрами. Основные понятия. Уравнения с параметрами // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2012. – N 11. – С. 53–61.

3. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 8. Неравенства с параметрами // Математика: Методический журнал для учителей математики. – 2013. – N 1. – С. 53–61.

4. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 9. Задачи с параметрами. Количественные характеристики множеств решений // Математика: Методический журнал для учителей математики. – 2013. – N 2. – С. 53–59.

5. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 10. Задачи с параметрами. Качественные свойства множеств решений // Математика: Методический журнал для учителей математики. – 2013. – N 3. – С. 53–59.

6. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 11. Задачи с параметрами. Взаимодействие множеств решений // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2013. N 4. С. 50–56.

7. Дятлов В. Н. Технологии решения задач. Лекция 12. Задачи с параметрами. Анализ семейств функций или множеств. Поиск пути решения // Математика: Методический журнал для учителей математики. – 2013. – N 5. – С. 52–58.

8. Дятлов В. Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 1 – 4. М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 80 с.

9. Дятлов В. Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 5–8. М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 72 с.

10. Дятлов В. Н., Дятлов Г. В., Дмитриева Ю. А. Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд 3. Уравнения, неравенства, системы. Соотношения с корнями (радикалами). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, – 2008. – 64 с.